САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ДОМ УЧЕНЫХ

XVIII МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

Математическое моделирование
в механике сплошных сред
на основе методов граничных
и конечных элементов
16–20 мая, 2000

BEM & FEM–2000

ТРУДЫ, ТОМ III

Санкт-Петербург
2000

BEM & FEM-2000

XVIII МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

Математическое моделирование
в механике сплошных сред
на основе методов граничных
и конечных элементов

16–20 мая 2000 г.
Санкт-Петербург, Россия

Труды

том III

Proceedings, III

18th International Conference
Mathematical Modelling
in Solid Mechanics
by Boundary & Finite Element Methods

May 16–20, 2000
Saint Petersburg, Russia

К вопросу точности определения НДС железнодорожных колес при помощи МКЭ

Сладковский А.В. (НМетАУ, Украина, Днепропетровск),
Шмурыгин Н.Д. (ГП НМЗ, Россия, Невьянск)

Метод конечных элементов является наиболее приемлемым способом расчета железнодорожных колес. Он позволяет учесть сложную геометрию колеса, а также различные силовые и термические факторы, воздействующие на колесо. В настоящее время существует достаточно большой выбор пакетов прикладных программ, реализующих МКЭ, например, NASTRAN, ANSYS, MARC, COSMOS. С их помощью проводятся расчеты новых конструкций железнодорожных колес, причем в условиях различных тендеров конечно-элементный расчет колес выдвигается в качестве обязательного требования. При разработке колес для высокоскоростного подвижного состава необходимо также учитывать динамическое взаимодействие в системе рельс – колесо - экипаж.

При использовании приближенных методов решения задач механики деформируемого твердого тела, а МКЭ является таким методом, возникает проблема оценки качества математической модели и погрешности, которая вносится в решение за счет конечно-элементной дискретизации. Здесь существует достаточно сложная математическая проблема. Теория МКЭ доказывает, что решение задачи механики при помощи МКЭ существует, для него выполняется условие единственности. Однако при этом оценка точности решения не дается. То есть, при «правильно» построенной КЭ-дискретизации, при отсутствии вытянутых конечных элементов, увеличение дискретности сетки позволяет получить приемлемое по точности решение. Повышение дискретности математической модели значительно увеличивает время вычислений. При этом предъявляются повышенные требования к элементной базе вычислительной техники, особенно к объему оперативной памяти и быстродействию, и, наконец, с увеличением количества степеней свободы значительно возрастает объем вычислений, а вместе с ним может накапливаться погрешность самих вычислений. Все это отмечалось в работе [1] в 1990 году, где указывалось, что погрешность решения по МКЭ для железнодорожных колес может достигать 150% и более, однако ряд авторов и в настоящее время решает задачи для железнодорожных колес не анализируя точности получаемых решений.

Необходимо задать вопрос: сколько конечных элементов и узлов достаточно для получения решения, погрешность которого не превысит, например, 5%. Следует также учесть, что для различных задач КЭ-дискретизация может отличаться. Если рассматривать задачу о сжатии бруса, имеющего сечение постоянного профиля, например, прямоугольного, то можно получить достаточно точное решение при малой дискретности КЭ-сетки. При рассмотрении изгиба того же объекта такая сетка не обеспечит требуемой точности решения.

Для железнодорожного колеса задача усложняется тем, что, несмотря на то, что само колесо является осесимметричным объектом, нагружение его вертикальными, осевыми и тангенциальными усилиями приводит к необходимости решения неосесимметричной задачи. На рис. 1 в качестве примера приведен расчет напряженного состояния колеса новой конструкции при помощи пакета ANSYS 5.5.1. Учитывалась только вертикальная сила, действующая по кругу катания колеса. Поэтому для упрощения постановки задачи можно было рассматривать только половину колеса.

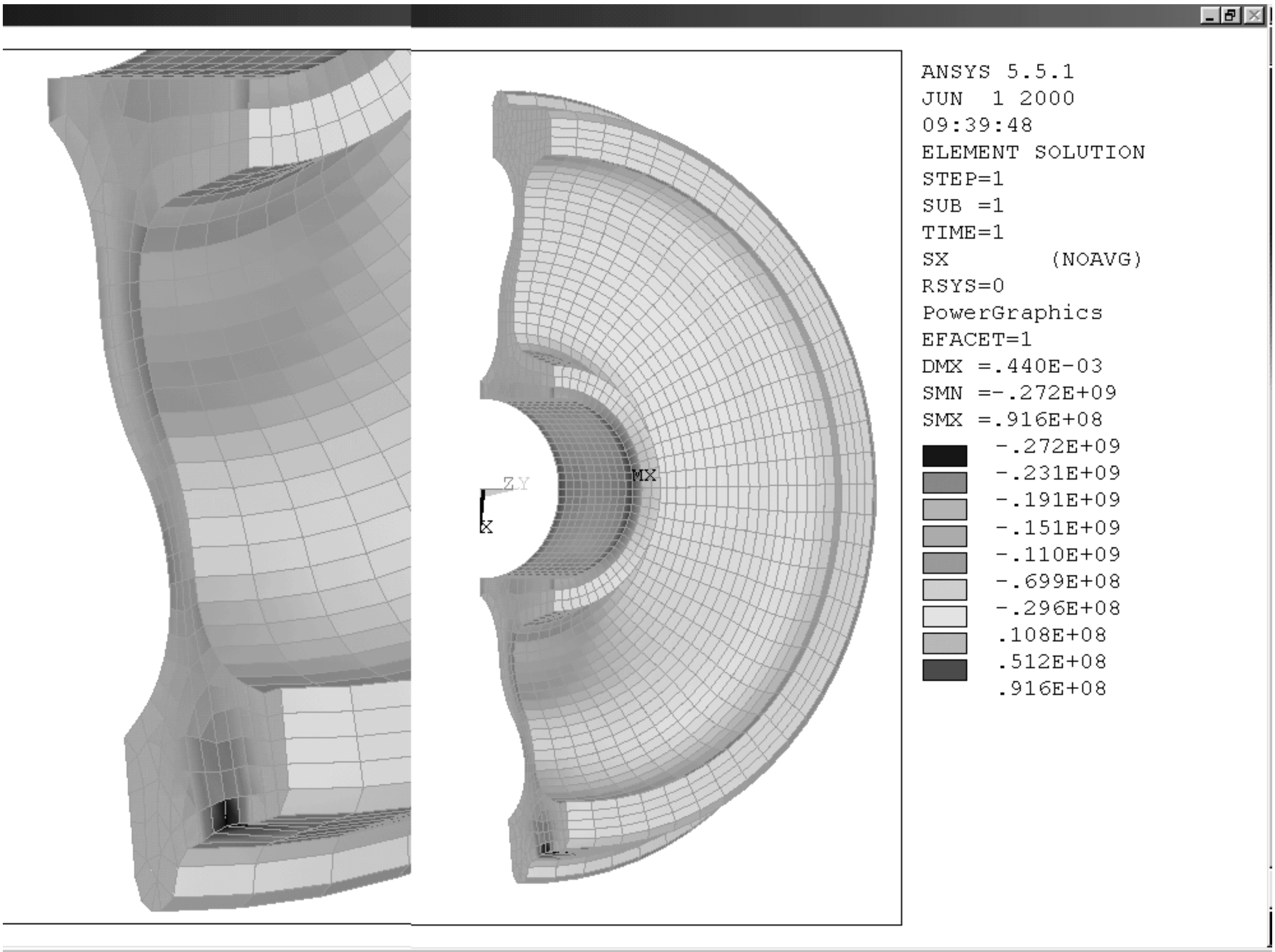
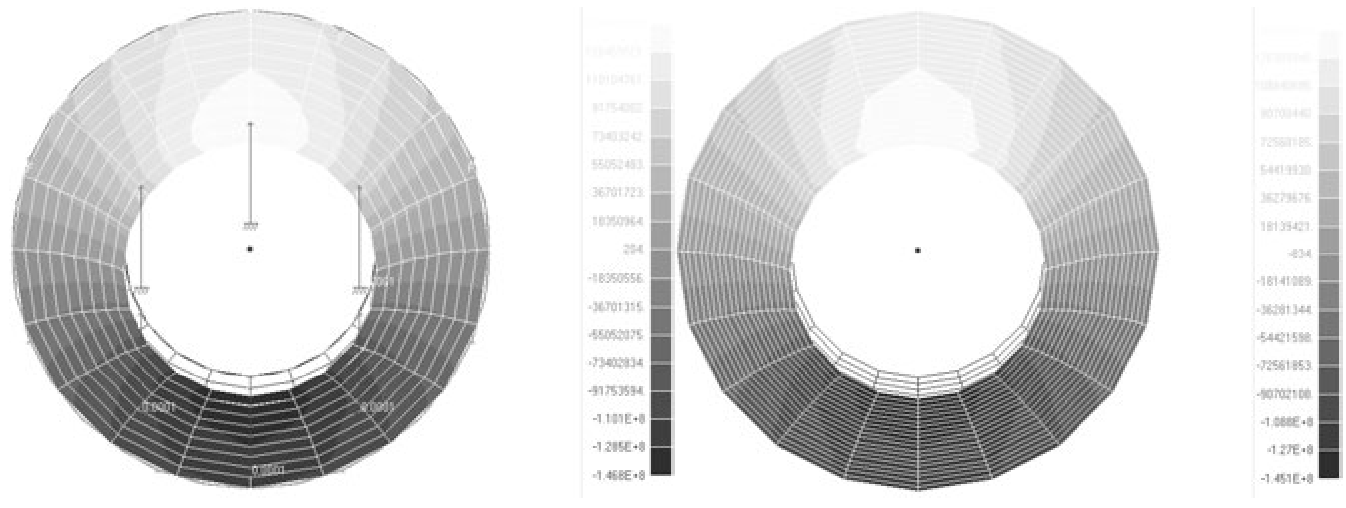


Рис. 1. Распределение радиальных напряжений в цельнокатаном железнодорожном колесе, полученное при помощи ППП ANSYS 5.5.1

На данном рисунке показано рассматриваемое колесо в деформированном состоянии, причем слева приведено увеличенное изображение колеса. КЭ-сетка состояла из 6336 пространственных элементов типа SOLID (как восьмиузловых, так и шестиузловых) и 7585 узлов. При этом дисковая область колеса разбивалась таким образом, чтобы по толщине диска было 4 конечных элемента. Достаточно ли этого количества элементов и, соответственно, узлов для того, чтобы погрешность решения не превышала 5%?

Для того чтобы получить ответ на этот вопрос, необходимо решить при данной КЭ-дискретизации тестовую задачу, для которой существует аналитическое решение. Эта задача должна насколько возможно близко соответствовать задаче деформирования железнодорожного колеса. Поскольку у колеса при действии вертикальной, осевой и тангенциальной сил наиболее деформируемой областью является диск, при этом деформации обода и ступицы, за исключением контактной области малы, то для оценки точности решения необходимо рассматривать задачу аналогичную деформированию дисковой области колеса. Такая задача была рассмотрена в работе [2], в которой исследовалось деформированное состояние осесимметричного диска постоянной толщины, ограниченного двумя цилиндрическими поверхностями (внутренним и наружным контуром), которые считались недеформируемыми и могли смещаться как жесткое целое. Рассмотрим с использованием [2] три задачи о деформировании такого диска, сравнивая их результаты с соответствующими решениями по МКЭ на базе пакета MSC/NASTRAN for Windows 4.0.

Рассмотрим первую задачу о плоском деформировании дисковой области, когда один из контуров, например, наружный, закреплен, а внутренний смещается на заданную величину Δ_y. На рис. 2 показаны решения данной задачи по МКЭ для различных КЭ-сеток. Здесь наглядно видно деформирование дисковой области и напряженное состояние (радиальные напряжения σ_r) диска.



а б

Рис. 2. Решение тестовой задачи о деформировании плоского диска постоянной толщины при вертикальном смещении внутреннего контура (а – сетка 3×10×20 узлов, б - сетка 6×20×20 узлов)

Решение задачи получено для стального диска, толщиной $h = 0{,}02$ м; радиус внутреннего контура которого $r_1 = 0{,}19$ м; наружного контура $r_2 = 0{,}36$ м. Указанные размеры соответствуют реальным размерам дисков вагонных колес, например, ГОСТ 9036-88 (здесь толщина является переменной от 17 до 24 мм). В соответствии с работой [2] запишем аналитическое решение для максимальных радиальных напряжений $\sigma_{r\,\max}$, которые достигаются в вертикальном сечении диска на его внутреннем контуре.

$$\sigma_{r\,\max} = \frac{\mu \Delta_y}{c}\left[\frac{3\kappa\left(r_1^2 + r_2^2\right)}{r_1} + 2r_1 + \frac{\kappa^2\left(r_1^2 + r_2^2\right)}{r_1} - 2\frac{\kappa r_2^2}{r_1}\right] \quad , \qquad (1)$$

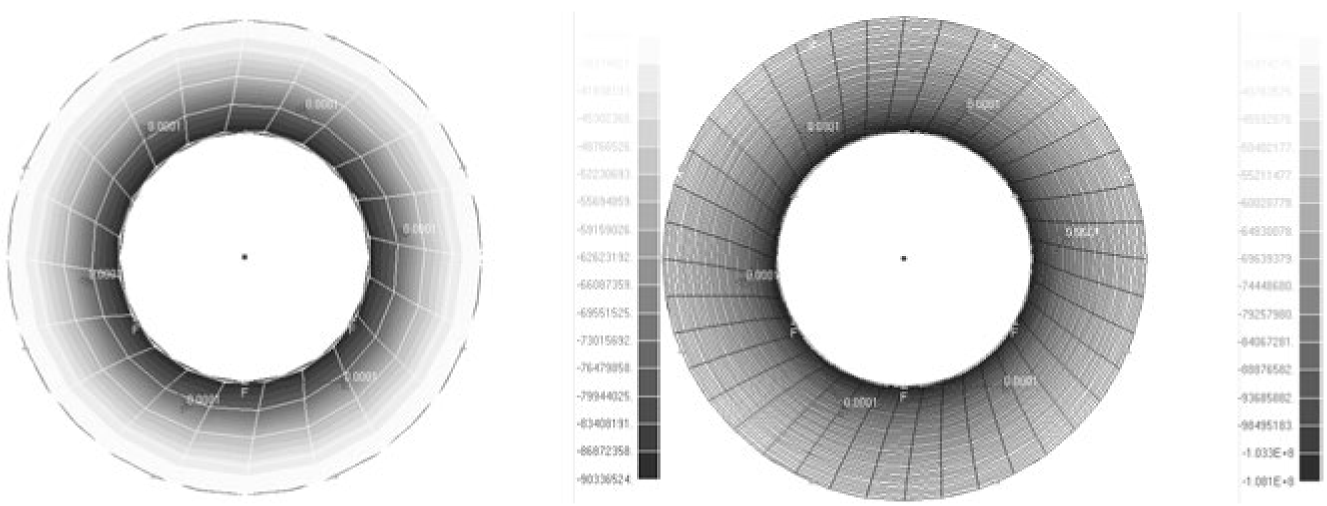
где μ и κ - коэффициенты Ламе, определяемые по формулам

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu},$$

в которых E- модуль упругости первого рода материала диска, а ν - коэффициент Пуассона. Константа c определяется при помощи следующей формулы

$$c = r_1^2 - r_2^2 - \kappa^2\left(r_1^2 + r_2^2\right)\ln\frac{r_1}{r_2}.$$

Максимальные радиальные напряжения, определенные по формуле (1), при заданном смещении $\Delta_y = 0{,}001$м равны 143,9 МПа. В таблице 1 приведено сравнение этого результата (задача 1 Sr max) с полученным при помощи МКЭ. Анализ данных результатов будет приведен далее, а сейчас рассмотрим задачу 2. В качестве такой задачи рассматривается деформирование дисковой области при неподвижном внешнем контуре и закручивании внутреннего на угол $\varsigma = \frac{\Delta_\vartheta}{r_1}$, где $\Delta_\vartheta = 0{,}001$м. На рис. 3 показано деформирование рассматриваемой дисковой области при решении соответствующей тестовой задачи по МКЭ.



а б

Рис. 3. Решение тестовой задачи о деформировании плоского диска постоянной толщины при вращении внутреннего контура (а – сетка 3×5×20 узлов, б - сетка 10×40×40 узлов)

Приведем аналитическое решение для данной задачи, которое получено на основе работы [2]. Максимальные напряжения сдвига локализованы на внутреннем контуре диска. Их величина определяется формулой

$$\tau_{r\vartheta\,\max} = \frac{2\mu\, r_2^2 \varsigma}{r_2^2 - r_1^2} \quad . \tag{2}$$

Аналогичная формула определяет минимальные напряжения сдвига

$$\tau_{r\vartheta\,\min} = \frac{2\mu\, r_1^2 \varsigma}{r_2^2 - r_1^2} \quad . \tag{3}$$

Рассчитанные значения $\tau_{r\vartheta\,\min}$ и $\tau_{r\vartheta\,\max}$ приведены в таблице 1 (Trt min и Trt max). Сравнение этих результатов с данными численного эксперимента будет приведено далее.

Рассмотрим третью осесимметричную задачу об изгибном деформировании диска при закрепленном внешнем контуре и осевом смещении $\Delta_z = 0{,}001$ м внутреннего контура. Ее решение для радиальных напряжений в точках на плоских поверхностях диска с координатами r имеет вид

$$\sigma_r = 6\frac{M(r)}{h^2} \quad , \tag{4}$$

где изгибающий момент в сечении диска равен

$$M(r) = D\left[\frac{d^2}{dr^2}\, w(r) + \frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\, w(r)\right] \quad . \tag{5}$$

Формула (5) в свою очередь зависит от распределения перемещений диска по координате z

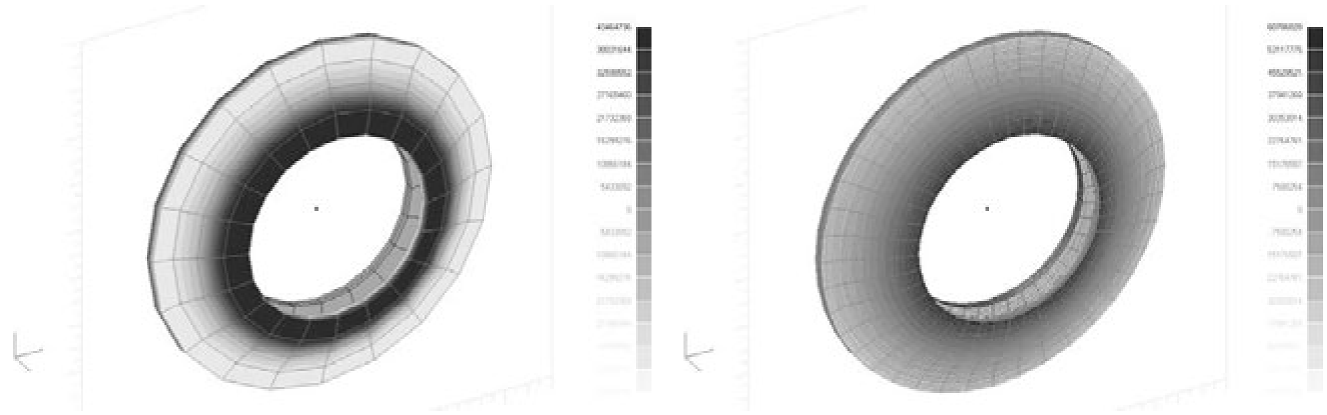
$$w(r) = \frac{Tr_2}{8\pi D\left(\eta^2 - 1\right)}\left\{\left[\ln(\eta) - 1 + \frac{\eta^2 + 1}{2}\right]\left(1 - \frac{r^2}{r_2^2}\right) - \left[2\ln(\eta) + \left(\eta^2 - 1\right)\frac{r^2}{r_2^2}\right]\ln\left(\frac{r_2}{r}\right)\right\}. \tag{6}$$

В формуле (6) изгибная жесткость D и осевая сила T определяются следующим образом

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1 - \nu^2\right)} \quad , \qquad T = \frac{\Delta_z}{c_1} \quad ,$$

где $c_1 = \dfrac{\left[\ln(\eta) - 1 + \dfrac{\eta^2 + 1}{2}\right]\left(1 - \dfrac{r_1^2}{r_2^2}\right) - \left[2\ln(\eta) + \left(\eta^2 - 1\right)\dfrac{r_1^2}{r_2^2}\right]\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{8\pi D\left(\eta^2 - 1\right)}\, r_2, \quad \eta = \dfrac{r_2}{r_1}.$

Приведенные выше формулы использовались для аналитического определения радиальных напряжений в деформированном диске. Анализ, проведенный при помощи ППП Mathcad 2000 Professional, показал, что экстремальные значения достигаются в поверхностных точках на границах внутреннего и внешнего контура. Указанные значения также приведены в таблице 1 (задача 3 Sr min и Sr max) в сравнении с результатами расчетов по МКЭ, которые также показаны на рис. 4.



а б

Рис. 4. Решение тестовой задачи об осесимметричном изгибе диска постоянной толщины (а – сетка 3×5×20 узлов, б - сетка 10×40×40 узлов)

Рассмотрим теперь результаты расчетов рассмотренных трех тестовых задач при помощи МКЭ. В таблице 1 также приведено время расчета задач на персональном компьютере типа IBM PC с процессором Intel Pentium II – 333 и объемом ОЗУ 128 Мб. Как видим, при расчете диска с КЭ-сеткой 10×40×40 узлов общее время расчета составляет более 36 минут. Применение более мощного процессора AMD Athlon 600 позволяет уменьшить общее время расчета до 17 минут. Однако очевидно, что провести расчет железнодорожного колеса в целом, а не только одного диска, при подобной дискретности задачи будет достаточно затруднительно, особенно учитывая необходимость проведения расчетов для разных конструкций колес и различных видов нагружения.

Анализ решения задачи 1 показывает, что даже самая редкая сетка 3×5×20 узлов дает хорошую точность решения задачи, погрешность которого не превышает 5%. Более того, при увеличении дискретности сетки погрешность решения, находясь в пределах допуска (δ<5%), увеличивается. Этот факт не является парадоксом, а объясняется тем, что КЭ решение при увеличении дискретности сетки позволяет учесть краевой эффект, который имеет место в наиболее нагруженной зоне прилегающей к наружному и внутреннему контурам.

Для задачи 2 только КЭ-сетки, начиная с 6×20×20 и более дискретные, могут удовлетворять условию δ<5%. При этом при увеличении дискретности сетки погрешность уменьшается.

Задача 3, как и ожидалось, наиболее критична по погрешности, вносимой в решение. Только КЭ-сетки 6×40×20, 10×20×40 и более дискретные обеспечивают погрешность решения δ<5%. Таким образом, чтобы обеспечить точность решения задачи определения напряженно – деформированного состояния цельнокатаного железнодорожного колеса при различных видах нагружения необходимо выбирать КЭ-сетку с относительно соразмерными размерами конечных элементов по трем локальным координатам, при этом количество конечных элементов по толщине дисковой области должно быть не менее 10.

Таблица 1

КЭ-сетка	Аналити-ческое решение	3x5x20	3x10x20	6x10x20	6x20x20	6x40x20	6x20x40	10x40x20	10x40x40
Узлы/Элементы		300/160	600/360	1200/900	2400/1900	4800/3900	4800/3800	8000/7020	16000/14040
Задача 1 Sr max (МПа)	143,9	144,7	146,8	142,9	145,1	146,4	146,6	146,1	148
Задача 2 Trt min (МПа)	30,8	34,9	32,5	32,5	31,5	31,2	31,6	31,2	31,2
Задача 2 Trt max (МПа)	110,5	90,3	100,6	100,6	105,6	108,1	105,6	108,1	108,1
Задача 3 Sr min (МПа)	-60,5	-43,5	-49,8	-51,7	-56,1	-59,7	-55,2	-61,7	-60,7
Задача 3 Sr max (МПа)	38,2	33,1	35	36,3	37,9	39,6	37,2	42,4	41,8
Полное время счета (с)		20	24	43	90	192	245	515	2165
Процессорное время (с)		10	13	29	69	162	172	477	2024
Примечание: при определении размерности КЭ-сетки первый параметр – количество узлов по толщине диска, второй - по радиусу, третий - по окружной координате									

В результате проведенных исследований были проанализированы КЭ-схемы, основанные на применении полуаналитического МКЭ. Было определено, что для задачи о деформировании цельнокатаного железнодорожного колеса такой подход является более эффективным по затратам процессорного времени, обеспечивает требуемую точность решения при удержании 11 членов ряда Фурье. Разработанные на основе полуаналитического МКЭ алгоритмы и программы были описаны в работе [3]. В настоящее время они доработаны и могут использоваться при расчетах железнодорожных колес, рельсов и других объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Есаулов В.П., Сладковский А.В. Определение погрешности дискретизации при конечноэлементном расчете железнодорожных колес. - Проблемы прочности. - 1990.- N5.-С.92-95.
2. Есаулов В.П., Сладковский А.В. К расчету напряженного состояния дисков крановых колес. - Известия ВУЗов. Машиностроение. - 1989.- N12.-С.98-103.
3. Есаулов В.П., Сладковский А.В. Напряженно - деформированное состояние цельнокатаных железнодорожных колес. - Проблемы прочности. - 1990.- N10.-С.75-78.