1

Министерство высшего и среднего специального образования
У С С Р

Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени
металлургический институт

РГАСНТИ 30.19.15 УДК 539.3:629.4.027.4

2398-Ук 88

В.И. Моссаковский, В.П. Есаулов,
А.В. Сладковский

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКОМ ДИСКЕ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО КОЛЕСА

Деп. в УкрНИИНТИ 19.09.88

15 с.

Государственная
республиканская научно-
техническая библиотека УССР

Днепропетровск 1988

В настоящее время существует большое количество различных конструкций цельнокатаных железнодорожных колес, однако оптимальная конструкция таких колес не найдена и методика конструирования профиля колес отсутствует как в СССР, так и за рубежом. Объяснение данному факту следует прежде всего искать в отсутствии приемлемой методики теоретического исследования напряженно-деформированного состояния колес. В результате анализа литературных источников был сделан вывод о том, что наиболее приемлем для расчета колеса в целом метод конечных элементов, например [1], [2]. Тем не менее, для применения МКЭ существуют ограничения, связанные с объемом оперативной памяти ЭВМ и их быстродействием, так как при взаимодействии с рельсом колесо находится в условиях трехмерного напряженного состояния. Применение полуаналитического МКЭ позволяет упростить процесс моделирования задачи на ЭВМ. При этом необходимо тщательно следить за обеспечением точности решения, так как конечноэлементная дискретизация, применение ограниченного числа членов ряда Фурье, а также численное решение систем линейных уравнений большого ($>$ 3000) порядка может вносить существенную погрешность. Поэтому для применения различных схем МКЭ желательно иметь точное решение какой-либо задачи, имеющей близкую расчетную схему.

Такой задачей может стать задача об определении напряжений в плоском диске постоянной толщины. Несмотря на то, что колеса с диском подобной формы не используются в народном хозяйстве, данная задача важна также для понимания работы диска железнодорожного колеса произвольной формы.

Рассмотрим расчетную схему задачи (рис. I). В силу значительного превышения толщины ступицы и обода по сравнению с толщиной диска можно для упрощения постановки считать их жесткими. При этом диск моделируется кольцевой пластиной, жестко заделанной по внутреннему и внешнему контурам (на рис.I заштрихован). Внутренний контур неподвижен, а внешний под воздействием нагрузок может смещаться. Координатная система связана со ступицей колеса. Ось z направлена в сторону наружной поверхности диска. Вертикальная нагрузка P приложена к ободу (к поверхности катания) и в заданной системе координат является отрицательной. Осевая нагрузка T приложена к ободу (к гребню) и также является отрицательной. Нагрузка T создает момент M, изгибающий диск относительно оси y.

Решение общей задачи может быть представлено в виде суперпозиции трех решений: решения плоской задачи об упругом смещении внешнего контура под воздействием усилия P (назовем ее первой задачей); решения задачи об осесимметричном изгибе кольцевой пластины под воздействием равномерно распределенной нагрузки, приложенной к внешнему контуру, причем равнодействующий вектор усилия от данной нагрузки равен T (вторая задача); решения задачи об изгибе кольцевой пластины распределенной на внешнем контуре косинусоидальной нагрузкой, главный вектор которой равен нулю, а главный момент $M=TR^*$, где R^* – расстояние от оси y до гребня колеса (третья задача).

Рассмотрим первую задачу. Главный момент для нее равен нулю. Под действием главного вектора на внешнем контуре он смещается параллельно себе на величину Δ, заранее неизвестную (осадка колеса). Для кругового кольца может быть поставлена вторая основная задача по Н.И. Мусхелишвили [3]. То есть на всей границе заданы условия в перемещениях. Необходимо найти комплексные функции φ и ψ, зависящие от комплексного пере-

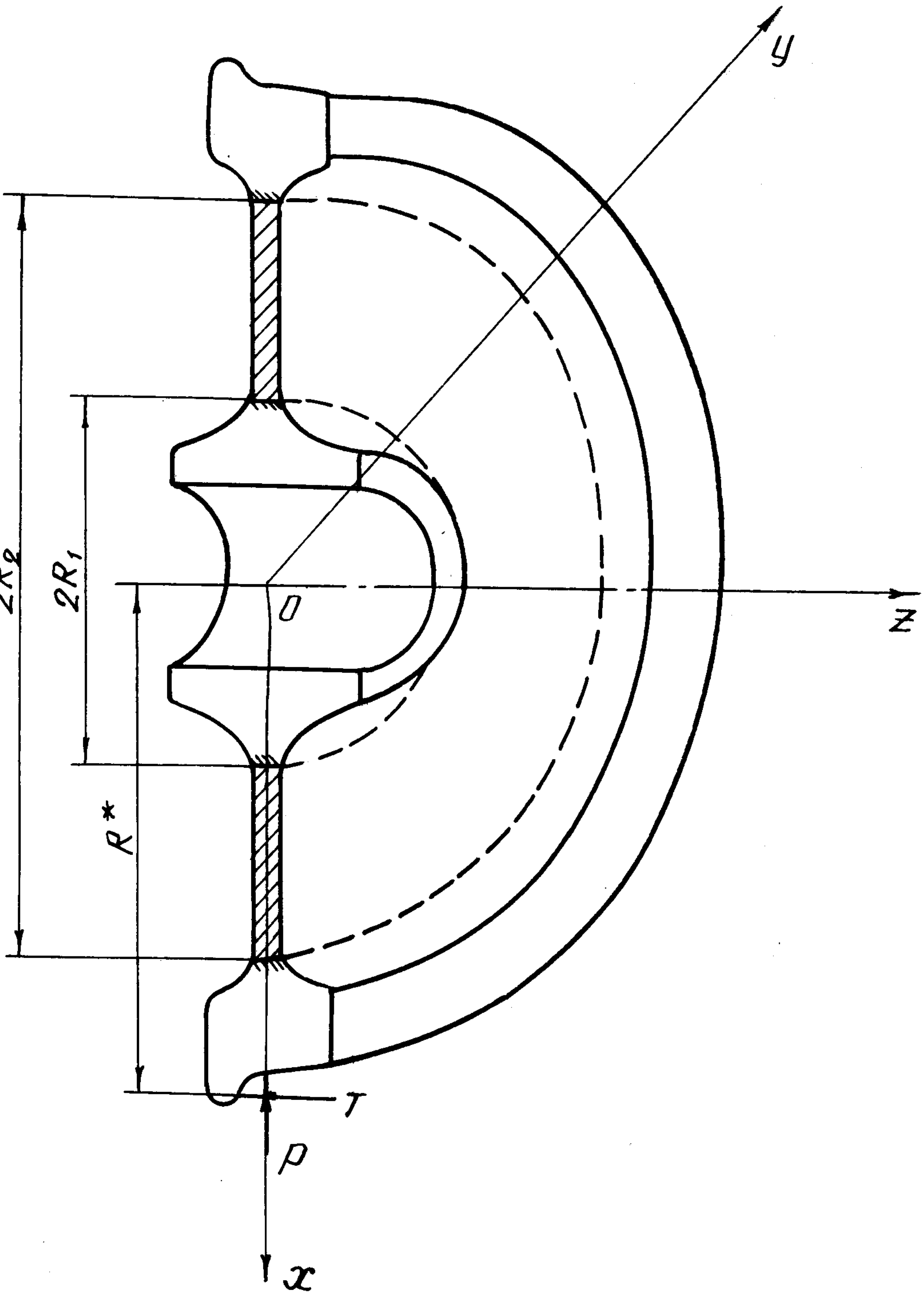

Рис. I. Расчетная схема задачи о деформировании плоского диска железнодорожного колеса менного $z=x+iy=re^{i\theta}$, для которых на границе L задано условие

$$\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}=2\mu(g_1+ig_2). \tag{I}$$

Граница L является совокупностью внутреннего L_1 и внешнего L_2 контуров. В формуле (I) параметры $\varkappa$ и μ для обобщенного плоского напряженного состояния равны

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{2}$$

$$\varkappa=\frac{3-\nu}{1+\nu}, \tag{3}$$

где E – модуль упругости первого рода, ν – коэффициент Пуассона. Для принятой модели функции g_i на контурах L_i равны

$$g_1=0, \qquad g_2=0 \qquad \text{на} \quad L_1 \tag{4}$$

$$g_1=\Delta, \qquad g_2=0 \qquad \text{на} \quad L_2 \tag{5}$$

В соответствии с методикой Н.И. Мусхелишвили [3] решение задачи будем искать в виде

$$\varphi(z)=\gamma_1 \ln z+\varphi^*(z), \tag{6}$$

$$\psi(z)=\gamma_1' \ln z+\psi^*(z), \tag{7}$$

где из условия однозначности смещений константы γ_1 и γ_1' связаны соотношением

$$\varkappa\gamma_1+\gamma_1'=0, \tag{8}$$

а голоморфные функции $\varphi^*(z)$ и $\psi(z)$ могут быть представлены в виде рядов Фурье

$$\varphi^*=\sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k, \qquad \psi^*=\sum_{-\infty}^{\infty} a_k' z^k. \tag{9}$$

Задача нахождения функций φ и ψ сводится к необходимости определения постоянных γ_1, γ_1' и коэффициентов рядов a_k и a_k', так чтобы функции φ и ψ в виде (6), (7) удовлетворяли граничному условию (I) на контурах L_i. Переходя к полярным координатам и находя сопряженные величины получим

$$\varphi(z) = \gamma_1(\ln r + i\theta) + \sum_{-\infty}^{\infty} a_k r^k e^{i\theta k}, \tag{10}$$

$$\overline{\psi(z)} = \overline{\gamma}_1'(\ln r - i\theta) + \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{a}_k' r^k e^{-i\theta k}. \tag{11}$$

Подставляя соотношения (10), (11) в граничное условие (I) и учитывая, что точки, находящиеся на контурах L_1 и L_2, описываются как

$$z = R_1 e^{i\theta} \qquad и \qquad z = R_2 e^{i\theta},$$

получим два уравнения в рядах

$$\varkappa\left[\gamma_1(\ln R_1 + i\theta) + \sum_{-\infty}^{\infty} a_k R_1^k e^{i\theta k}\right] - R_1 e^{i\theta}\left[\overline{\gamma}_1 R_1^{-1} e^{i\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} k\overline{a}_k R_1^{k-1} e^{-i\theta(k-1)}\right] - \overline{\gamma}_1'(\ln R_1 - i\theta) - \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{a}_k' R_1^k e^{-i\theta k} = 0, \tag{12}$$

$$\varkappa\left[\gamma_1(\ln R_2 + i\theta) + \sum_{-\infty}^{\infty} a_k R_2^k e^{i\theta k}\right] - R_2 e^{i\theta}\left[\overline{\gamma}_1 R_2^{-1} e^{i\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} k\overline{a}_k R_2^{k-1} e^{-i\theta(k-1)}\right] - \overline{\gamma}_1'(\ln R_2 - i\theta) - \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{a}_k' R_2^k e^{-i\theta k} = 2\mu\Delta. \tag{13}$$

Для того, чтобы равенства (12), (13) были справедливы, необходимо приравнять нулю коэффициенты при θ и $e^{i\theta k}$. При этом получим

$$\varkappa\gamma_1 + \overline{\gamma}_1' = 0. \tag{14}$$

Учитывая условие (8), можно сделать вывод о том, что γ_1 и γ_1' - действительные числа.

Выписав коэффициенты при нулевой степени e из соотношений (12), (13), приравняв их нулю и вычитая из одного уравнения другое, получим

$$\gamma_1'(\ln R_1 - \ln R_2) + \overline{a}_2(R_1^2 - R_2^2) = \mu\Delta. \tag{15}$$

Так как все величины, входящие в соотношение (I5), являются действительными, то для a_2 справедливо

$$a_2 = \bar{a}_2 = (\mu\Delta - \gamma_1' \ln\frac{R_1}{R_2})\frac{1}{R_1^2 - R_2^2} . \qquad (I6)$$

Выписав коэффициенты при $e^{2i\theta}$, приравняв нулю, домножив первое из уравнений на R_1^2, а второе на R_2^2 и вычитая, получим для γ_1

$$\gamma_1 = \varkappa a_2(R_1^2 + R_2^2). \qquad (I7)$$

Подставив в (I7) a_2 из (I6) и используя условие (8), получим окончательно для

$$\gamma_1 = \frac{\mu\Delta\varkappa(R_1^2 + R_2^2)}{C} , \qquad (I8)$$

где

$$C = R_1^2 - R_2^2 - \varkappa^2(R_1^2 + R_2^2)\ln\frac{R_1}{R_2} . \qquad (I9)$$

Тогда

$$\gamma_1' = -\frac{\mu\Delta\varkappa^2(R_1^2 + R_2^2)}{C} . \qquad (20)$$

Из (I7) и (I8) найдем a_2

$$a_2 = \frac{\mu\Delta}{C} , \qquad (2I)$$

а для a'_{-2}, получим

$$a'_{-2} = -\frac{\varkappa\mu\Delta R_1^2 R_2^2}{C} . \qquad (22)$$

При выводе (22) учтено, что $a'_{-2} = \bar{a}'_{-2}$.

Найдем остальные коэффициенты рядов Фурье. Выпишем коэффициенты при $e^{ki\theta}$

$$\varkappa a_k R_1^k - (2-k)\bar{a}_{2-k} R_1^{2-k} - \bar{a}'_{-k} R_1^{-k} = 0, \qquad (23)$$

$$\varkappa a_k R_2^k - (2-k)\bar{a}_{2-k} R_2^{2-k} - \bar{a}'_{-k} R_2^{-k} = 0. \qquad (24)$$

Домножим (23) на R_1^k, а (24) на R_k^2 и вычтем из (23).

Тогда

$$\varkappa a_k(R_1^{2k}-R_2^{2k})-(2-k)\bar{a}_{2-k}(R_1^2-R_2^2)=0. \quad (25)$$

Так как в уравнении (25) k может принимать любые значения кроме $k=0$ (случай рассмотрен ранее), то можно произвести замену k на $2-k$. В результате получим

$$\varkappa a_{2-k}(R_1^{2(2-k)}-R_2^{2(2-k)})-k\bar{a}_k(R_1^2-R_2^2)=0. \quad (26)$$

Уравнения (25) и (26) представляют систему для нахождения коэффициентов a_k и $\bar{a}_{2-k}$. За исключением случаев $k=0$ и $k=2$ при $R_1 \neq R_2$ ее определитель не равен нулю. Следовательно, система может иметь только тривиальное решение, таким образом

$$\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_1, a_3, a_4, \ldots = 0. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (23), получим аналогичные соотношения для коэффициентов a_k'

$$\ldots, a_{-4}', a_{-3}', a_{-1}', a_1', a_2', \ldots = 0. \quad (28)$$

Таким образом, неопределенными остались лишь коэффициенты a_0 и a_0' . Для их определения приравняем нулю коэффициент при нулевой степени e в уравнении (I2), откуда

$$\varkappa a_0 - \bar{a}_0' = 2\gamma_1'\, ln R_1 + 2a_2 R_1^2 . \quad (29)$$

Воспользуемся тем, что один из коэффициентов ряда может быть выбран произвольно. Положим $a_0 = 0$. Тогда

$$a_0' = \frac{2\mu\Delta}{c}\left[\varkappa^2(R_1^2+R_2^2)\,ln R_1 - R_1^2\right] . \quad (30)$$

Подставляя в соотношения (6), (7), (9) найденные коэффициенты, запишем искомые функции

$$\varphi(z) = \frac{\mu\Delta}{c}\left[\varkappa(R_1^2+R_2^2)\,ln z + z^2\right] , \quad (3I)$$

$$\psi(z) = \frac{\mu\Delta}{c}\left[-\varkappa^2(R_1^2+R_2^2)\,ln z + 2\varkappa^2(R_1^2+R_2^2)\,ln R_1 - 2R_1^2 - \frac{\varkappa R_1^2 R_2^2}{z^2}\right] . \quad (32)$$

Для нахождения неизвестного смещения Δ воспользуемся соотношением, полученным в [3] из условий равновесия

$$\gamma_1 = -\frac{X_1 + iY_1}{2\pi(1+\varkappa)}, \tag{33}$$

где X_1, Y_1 - главный вектор усилий на контуре L_1. Подставляя γ_1 из (18), получим для Δ

$$\Delta = \frac{CP}{2\mu\pi(1+\varkappa)\varkappa(R_1^2+R_2^2)h}, \tag{34}$$

где h - толщина диска.

Определим решение задачи I в напряжениях в полярной системе координат r, θ. По формулам Мусхелишвили [3]

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right], \tag{35}$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} = 2\left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right]e^{2i\theta}, \tag{36}$$

где σ_r, σ_θ - радиальные и окружные нормальные напряжения и $\tau_{r\theta}$ - тангенциальные напряжения

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \qquad \Psi(z) = \psi'(z). \tag{37}$$

Используя выражения (31), (32) и учитывая (37), получим из (35), (36) следующие соотношения

$$\sigma_r = \frac{\mu\Delta}{C}\left[3\frac{\varkappa(R_1^2+R_2^2)}{r} + 2r + \frac{\varkappa^2(R_1^2+R_2^2)}{r} - \right.$$
$$\left. - 2\varkappa R_1^2 R_2^2 \frac{1}{r^3}\right]\cos\theta, \tag{38}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\mu\Delta}{C}\left[\frac{\varkappa(R_1^2+R_2^2)}{r} + 6r - \frac{\varkappa^2(R_1^2+R_2^2)}{r} + \right.$$
$$\left. + 2\varkappa R_1^2 R_2^2 \frac{1}{r^3}\right]\cos\theta, \tag{39}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\mu\Delta}{C}\left[\frac{\varkappa(R_1^2+R_2^2)}{r} + 2r - \frac{\varkappa^2(R_1^2+R_2^2)}{r} - \right.$$
$$\left. - 2\varkappa R_1^2 R_2^2 \frac{1}{r^3}\right]\sin\theta. \tag{40}$$

Далее рассмотрим сначала третью задачу. Существует решение аналогичной задачи об изгибе круглой кольцевой плиты с подкрепленным внутренним и жестко заделанным внешним краем, приведенное в монографии Г.Н. Савина и Н.П. Флейшмана [4]. Момент M приложен к внутреннему контуру. Для случая жесткого внутреннего контура решение имеет вид

$$w = -\left\{\frac{MR_2}{8\pi D}\left[(1-2C_1)\frac{r}{R_2}+(C_1-1)\frac{r^3}{R_2^3}+2\frac{r}{R_2}\ln\frac{r}{R_2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+C_1\frac{R_2}{r}\right]+B\left[2\frac{r}{R_2}-\frac{r^3}{R_2^3}-\frac{R_2}{r}\right]\right\}\cos\theta, \qquad (41)$$

где

$$C_1 = \frac{3+\nu-\eta^2(1+\nu)}{3+\nu+\eta^4(1-\nu)}, \qquad (42)$$

$$B = -\frac{MR_2}{4\pi D}\cdot\frac{\eta^2(\eta^2-1)}{(\eta^2+1)\left[3+\nu+\eta^4(1-\nu)\right]}. \qquad (43)$$

В формулах (41) - (43) η - отношение радиусов, D - цилиндрическая жесткость пластинки, w - прогиб

$$\eta = \frac{R_2}{R_1}, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \qquad (44)$$

Угол поворота обода относительно неподвижной ступицы ζ имеет вид

$$\zeta = -\left(\frac{w}{r\cos\theta}\right)_{r=R_1} = \frac{M\eta}{8\pi D}\left[(1-2C_1)\frac{1}{\eta}+\right.$$
$$\left.+(C_1-1)\frac{1}{\eta^3}-\frac{2}{\eta}\ln\eta+C_1\eta\right]+\frac{B}{R_1}\left[\frac{2}{\eta}-\frac{1}{\eta}-\eta\right]. \qquad (45)$$

Для нахождения напряжений изгиба необходимо вычислить изгибающие моменты M_r, M_θ, $H_{r\theta}$. Воспользуемся формулами теории оболочек в полярных координатах

$$M_r = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right), \qquad (46)$$

$$M_\theta = -D\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right), \tag{47}$$

$$H_{r\theta} = -(1-\nu)D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right). \tag{48}$$

Напряжения в диске определяются по формулам

$$\sigma_r = \frac{12z}{h^3}M_r\,, \tag{49}$$

σ_θ , $\tau_{r\theta}$ определяются аналогично. То есть, подставляя в (49) выражение (46) и находя частные производные от w ,можно получить аналитические выражения для напряжений. Необходимо при этом учесть, что в силу заданной расчетной схемы необходимо знак M изменить на противоположный.

Для задачи 2 также существует решение в перемещениях. После преобразований, сводящих решение [4] к поставленной задаче, получим выражение для прогибов

$$w = -\frac{TR_2^2}{8\pi D(\eta^2-1)}\left\{\left[\frac{\eta^2+1}{2} - 1 + \ln\eta\right]\left(1-\frac{r^2}{R_2^2}\right) - \left[2\ln\eta + (\eta^2-1)\frac{r^2}{R_2^2}\right]\ln\frac{R_2}{r}\right\}. \tag{50}$$

Прогибы w не зависят от θ , как и должно быть для осесимметричной задачи, поэтому для нахождения моментов по формулам (46) - (48), частные производные по θ в них заменяются обычными, а производные по r равны нулю. Напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ находятся по формуле (49). Суперпозиция решений задач I-3 дает общее решение задачи об определении напряженного состояния диска железнодорожного колеса при его взаимодействии с рельсом.

На рис. 2 представлены графики напряжений в плоском диске при действии нагрузок P = -I5 т, T = -8 т для вертикального сечения колеса (угол θ = 0^0 и 180^0). Толщина h = 20 мм, радиус диска у ступицы R_1 = I4,5 см, радиус диска у обода R_2 = 39 см, расстояние R^* = 48 см. Сплошная линия соответствует радиальным напряжениям σ_r , пунктирная – окружным σ_θ . Тангенциальные напряжения $\tau_{r\theta}$ в данном сечении отсутствуют. Максимум σ_r = 587 МПа находится на внешней поверхности диска в сечении θ = 0°. В том же сечении, но на внутренней поверхности, находится минимум σ_r = –6I8 МПа. Максимум тангенциальных напряжений $\tau_{r\theta}$ находится в сечении θ = 90° (θ = 270°) и равен 55 МПа. Окружные напряжения σ_θ подобны σ_r по характеру распределения, но имеют меньшие экстремальные значения.

Рассмотрение каждой задачи I–3 в отдельности позволило сделать вывод, что максимальный вклад в общую картину напряжений вносит решение задачи 3, в то время как задача I оказывает малое влияние. Поэтому в том случае, если боковое усилие, действующее на колесо, является незначительным или частота его воздействия мала, то создание колес с малым отклонением от плоской формы диска является целесообразным. В противном случае, который чаще всего реализуется в практике железнодорожного транспорта, необходимо за счет смещения ступицы относительно обода компенсировать влияние изгибающего момента от действия бокового усилия.

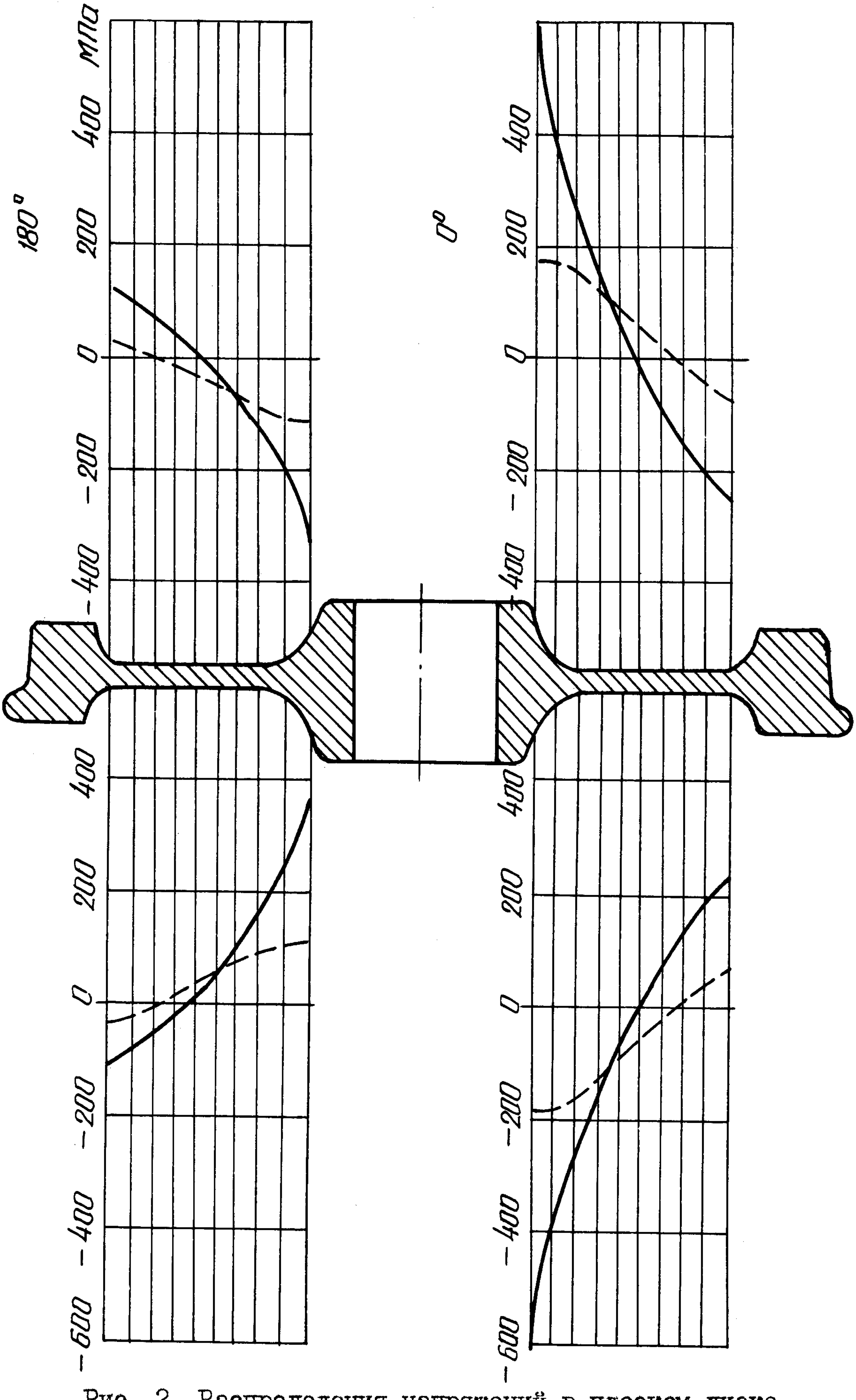

Рис. 2. Распределения напряжений в плоском диске

Литература

I. Рузин, Клещульте, Кофлин. Применение метода конечных элементов для расчета усовершенствованных конструкций колес железнодорожных вагонов // Конструирование.- М.: Мир, I979.- Т. IOI.- № 3.- С. 220 - 227.

2. Альтенбах И., Андреев А.Г., Фриче Г. Расчет напряжений и деформаций в вагонных колесах // Динамика и прочность машин.- Харьков, I978.- Вып. 28.- С. I26 - I33.

3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.- М.: Наука, I966.- 708 с.

4. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости.- Киев: Наукова думка, I964.

ПЕЧАТАЕТСЯ В СООТВЕТСТВИИ С РЕШЕНИЕМ УЧЕНОГО
СОВЕТА ЭНЕРГОМЕХАНИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ДНЕПРОПЕТРОВСКОГО МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ОТ 20 МАЯ 1988 ГОДА