

Министерство высшего и среднего специального
образования СССР

Днепропетровский ордена Трудового Красного Знамени
металлургический институт

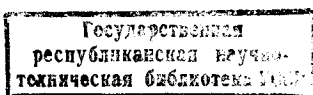
РГАСНИ 30.19.15

УДК 539.3

В.П.Есаулов, А.В.Сладковский

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МКЭ К РАСЧЕТУ
ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ
НАГРУЗКИ

Дел. в Укр НИИ НТИ 02.01.89



19с.

Днепропетровск, 1988

14-Ук89

Известно, что применение метода конечных элементов (МКЭ) для расчета трехмерных тел затруднительно даже несмотря на возможность применения современной вычислительной техники типа ЭВМ ЕС-1045, 1060 и др. Это связано с большим объемом вычислений, для которых необходимо высокое быстродействие ЭВМ и большая оперативная память. Применение же суперэлементных подходов для массивных тел сложной формы не эффективно. Поэтому применение для расчета тел вращения под действием неосесимметричной нагрузки полуаналитического МКЭ в ряде случаев оправдано. При этом вычислительная трудоемкость задачи может быть снижена на порядок.

Полуаналитический МКЭ был впервые разработан в статье [1], где данный подход предлагалось использовать для расчета конструкций летательных аппаратов, в том числе и оболочечных конструкций.

В своей монографии [2] О. Зенкевич посвятил полуаналитическому МКЭ одну главу, где кратко изложил его основные положения. Им предлагалось в частности для нахождения матрицы жесткости n -ой гармоники проводить численное интегрирование.

В настоящее время полуаналитический МКЭ эффективно используется исследователями, например, для расчета железнодорожных колес [3], [4]. Однако найти подробное изложение алгоритма или вычислительных программ затруднительно. Это прежде всего связано с коммерческим подходом к программному обеспечению. Например, программа *ANsys*, применяемая в [3], является разработкой и собственностью фирмы *Swanson Analysis System, Inc*. Достоверность разработок и полученных результатов также не всегда очевидна. Например, в статье [4] говорится о возможности исследования колеса при удержании 60

членов в разложении в ряд Фурье. Достаточно ли этого? Исследование данного вопроса не приводится, а результаты вообще приведены для осесимметричного случая.

В данной статье сделана попытка подробно изложить вариант полуаналитического МКЭ, для которого удастся избежать численного интегрирования при нахождении матрицы жесткости. Аналогичный подход для осесимметричной деформации изложен в работе [5]. При выводе расчетных формул были устранены отдельные опечатки и неточности работ [2] и [5].

Выпишем основные соотношения полуаналитического МКЭ. При их выводе будем придерживаться положений работы [2], а также обозначений, принятых в ней. Вектор перемещений в точке с координатами r , z , θ может быть представлен в виде разложения в ряд Фурье

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_r(r, z, \theta) \\ u_z(r, z, \theta) \\ u_\theta(r, z, \theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=0}^L [u_{rn}^S(r, z) \cos n\theta + u_{rn}^A(r, z) \sin n\theta] \\ \sum_{n=0}^L [u_{zn}^S(r, z) \cos n\theta + u_{zn}^A(r, z) \sin n\theta] \\ \sum_{n=0}^L [u_{\theta n}^S(r, z) \sin n\theta + u_{\theta n}^A(r, z) \cos n\theta] \end{Bmatrix}, \quad (I)$$

В разложении (I) ограничиваемся $L + 1$ членом ряда Фурье. Индексами S и A обозначена симметричная и антисимметричная часть разложений. В большинстве задач о нагружении конструкций типа железнодорожного колеса антисимметричная часть отсутствует. То есть

$$u_{rn}^A = u_{zn}^A = u_{\theta n}^A = 0. \quad (2)$$

В дальнейшем верхний индекс S отбрасываем.

Проведем конечноэлементную дискретизацию области, занятой исследуемым механическим объектом. Предположим, что область по-

крывается сеткой конечных элементов I порядка. Каждый элемент представляет из себя тело, образованное вращением треугольника с узлами i, j, m вокруг оси. Таким образом, в дальнейшем под понятием узловых перемещений и узлов, понимаем узловые окружности и перемещения точек, лежащих на них. Пусть КЭ – сетка имеет N узлов. Тогда деформированное состояние тела будет характеризоваться вектором узловых перемещений

$$\{\delta\} = \left\{ \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_N \end{Bmatrix} \right\}, \quad (3)$$

где каждый элемент $\{\delta_i\}$ также является вектором и характеризует 3 перемещения i – узла. То есть

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_{ir} \\ u_{zi} \\ u_{\theta i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_r(r_i, z_i, \theta_i) \\ u_z(r_i, z_i, \theta_i) \\ u_\theta(r_i, z_i, \theta_i) \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Рассмотрим K – элемент, имеющий узлы i, j, m . Вектор перемещений в любой точке K – элемента с учетом соотношения (I) в матричной форме имеет вид

$$\{u\}^K = \sum_{n=0}^L \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin n\theta \end{bmatrix} \{u_n\}^K, \quad (5)$$

где

$$\{u_n\}^K = \begin{Bmatrix} u_{rn} \\ u_{zn} \\ u_{\theta n} \end{Bmatrix}^K, \quad (6)$$

Элементы данного вектора являются функциями двух координат r и z и с помощью функций формы может быть установлена связь между вектором $\{u_n\}^K$ и узловыми перемещениями, вернее соответствующими коэффициентами разложений узловых перемещений в

в ряды Фурье

$$\{u_n\}^K = [IN_i, IN_j, IN_m] \begin{Bmatrix} \delta_i^n \\ \delta_j^n \\ \delta_m^n \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Связь между вектором $\{\delta\}^K$ и коэффициентами его разложения в ряд Фурье аналогична (5). В формуле (7) I - единичная матрица

$$I = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

N_i - функции формы

$$N_i = \frac{\alpha_i + \beta_i r + \gamma_i z}{2\Delta},$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} I & r_i & z_i \\ I & r_j & z_j \\ I & r_m & z_m \end{vmatrix},$$

$\alpha_i = r_j z_m - r_m z_j$, $\beta_i = z_j - z_m$, $\gamma_i = r_m - r_j$.
 $\alpha_j, \alpha_m, \beta_j, \beta_m, \gamma_j, \gamma_m$ получаются циклической перестановкой номеров узлов i, j, m .

Соотношения Копи в цилиндрических координатах для K - элемента могут быть записаны в матричной форме

$$\{\varepsilon\}^K = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} = [\theta] \cdot \{u\}^K, \quad (8)$$

где $[\delta]$ — матричный дифференциальный оператор, имеющий вид

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & -\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Тогда, подставляя в (8) соотношение (5) с учетом функций формы (7), получим деформации для K элемента в зависимости от его узловых перемещений

$$\{\varepsilon\}^K = \sum_{n=0}^L [B^n]^K \begin{Bmatrix} \delta_i^n \\ \delta_j^n \\ \delta_m^n \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

где матрица

$$[B^n]^K = [B_i^n, B_j^n, B_m^n]^K \quad (10)$$

состоит из подматриц $[B_i^n]^K$, имеющих вид

$$[B_i^n]^K = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} \delta_i \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & c_i \cos n\theta & 0 \\ \left(\frac{a_i}{r} + \delta_i + \frac{c_i z}{r}\right) \cos n\theta & 0 & n\left(\frac{a_i}{r} + \delta_i + \frac{c_i z}{r}\right) \cos n\theta \\ c_i \cos n\theta & \delta_i \cos n\theta & 0 \\ -n\left(\frac{a_i}{r} + \delta_i + \frac{c_i z}{r}\right) \sin n\theta & 0 & -\left(\frac{a_i}{r} + \frac{c_i z}{r}\right) \sin n\theta \\ 0 & -n\left(\frac{a_i}{r} + \delta_i + \frac{c_i z}{r}\right) \sin n\theta & c_i \sin n\theta \end{bmatrix} \quad (11)$$

Закон Гука в цилиндрических координатах также запишем в матричном виде

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \quad (I2)$$

Здесь и в дальнейшем индекс $\mathcal{H}$, говорящий о том, что выражение относится к $\mathcal{H}$ -элементу, опущен. В соотношении (I2) $\{\sigma\}$ - вектор напряжений, $\{\varepsilon_0\}$ - вектор начальных деформаций, $[D]$ - матрица упругих коэффициентов.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{z\theta} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha t \\ \alpha t \\ \alpha t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (I4)$$

$$[D] = C \begin{bmatrix} 1 & A & A & 0 & 0 & 0 \\ A & 1 & A & 0 & 0 & 0 \\ A & A & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix}, \quad (I5)$$

где

$$C = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad A = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad B = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}. \quad (I6)$$

Формула (I4) представляет из себя запись вектора начальных деформаций при наличии температурного градиента. α - коэффициент линейного расширения, t - усредненная по элементу тем-

пература. В формулах (I6) E — модуль упругости I рода,
 ν — коэффициент Пуассона.

Процедура составления конечно-элементного ансамбля совпадает с общепринятой, а разрешающее матричное уравнение имеет известный вид

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{F\} \quad (I7)$$

где матрица жесткости $[K]$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K^{00}] & & & \\ & [K^{11}] & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [K^{LL}] \end{bmatrix}, \quad (I8)$$

что позволяет вместо решения одного уравнения (I7) решать L уравнений меньшей размерности

$$[K^{nn}] \{\delta^n\} = \{F^n\}, \quad n = 0, 1, \dots, L \quad (I9)$$

При этом размерность каждого уравнения (I9) равна $3N$, то есть, матричное уравнение (I9) представляет из себя систему линейных алгебраических уравнений порядка $3N$.

При составлении ансамбля матрицы $[K^{nn}]$ собираются поэлементно из подматриц

$$[K_{ij}^{nn}] = \iiint_V [B_i^n]^T [D] [B_j^n] dV, \quad (20)$$

где интегрирование проводится по объему K — элемента. Индекс T обозначает транспонирование матрицы.

Обычно данное интегрирование проводится численно в силу большой трудоемкости и громоздкости процесса, однако для случая треугольного сечения элемента, интеграл (20) может быть найден в квадратурах.

Пусть матрица $[B_j^n]$ состоит из элементов B_{pq}^{nj} (индекс n опустим, чтобы не загромождать индексацией), а матрицы $[D]$ — из элементов d_{pq} . То есть

$$[B_j''] = [\delta_{pq}^j] \quad ; \quad [D] = [d_{pq}]$$

$p=1,6$ $q, p=1,6$
 $q=1,3$

Тогда произведение матриц под интегралом (20) представляет матрицу порядка 3 x 3 с элементами

$$[B_i'']^T [D] [B_j''] = \left[\sum_{q=1} \sum_{p=1} \delta_{q\kappa}^j \delta_{pl}^i d_{pq} \right]$$

$\kappa, l = 1,3$

или для матрицы $[\kappa_{ij}]$

$$[\kappa_{ij}] = \left[\sum_{q=1} \sum_{p=1} d_{pq} \iiint_V \delta_{q\kappa}^j \delta_{pl}^i dV \right] \quad (2I)$$

$\kappa, l = 1,3$

В (2I) учтено, что по объему элемента считаем упругие свойства неизменными. В противном случае d_{pq} нельзя бы было выносить за знак интеграла. Заметим теперь, что $\delta_{q\kappa}^j$ может быть представлен в виде (см. (II))

$$\delta_{q\kappa}^j = (c_1^j + \frac{c_2^j}{r} + \frac{c_3^j z}{r}) \cos n\theta. \quad (22)$$

или скобка может домножаться на $\sin n\theta$. При этом подразумевается, что для каждого индекса $q\kappa$ c_j^j свои. Например, для δ_{53}^j

$$c_1^j = 0, \quad c_2^j = -\frac{a_j}{2\Delta}, \quad c_3^j = -\frac{c_j}{2\Delta},$$

и домножение на $\sin n\theta$. Тогда интеграл в выражении (2I) может быть записан в виде

$$\iiint_V \delta_{q\kappa}^j \delta_{pl}^i dV = J \iint_S (c_1^j + \frac{c_2^j}{r} + \frac{c_3^j z}{r}) (c_1^i + \frac{c_2^i}{r} + \frac{c_3^i z}{r}) r ds, \quad (23)$$

где интегрирование по S осуществляется по площади сечения элемента, J - интеграл учитывающий окружную координату θ , при-

чем в зависимости от домножения ($\sin$ или $\cos$), а также значения n он будет равен

$$J = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \pi \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \pi \\ \int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos n\theta d\theta = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{соответст-} \\ \text{венно при} \\ n = 0 \end{matrix} \quad \begin{cases} 2\pi \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (24)$$

Коэффициенты C_i^j не зависят от координат, тогда интеграл (23) может быть записан в виде

$$\iiint_V \theta_{qK}^j \theta_{pL}^i dV = J \left[C_1^i C_1^j J_1 + (C_1^i C_1^j + C_2^i C_1^j) J_2 + (C_1^i C_3^j + C_3^i C_1^j) J_3 + C_2^i C_2^j J_4 + (C_2^i C_3^j + C_3^i C_2^j) J_5 + C_3^i C_3^j J_6 \right], \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \iint_S r ds, & J_4 &= \iint_S \frac{ds}{r}, \\ J_2 &= \iint_S ds, & J_5 &= \iint_S \frac{z}{r} ds, \\ J_3 &= \iint_S z ds, & J_6 &= \iint_S \frac{z^2}{r} ds. \end{aligned}$$

Каждый из этих шести интегралов может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} J_i &= \iint_S f_i(r, z) ds = \int_{r_i}^{r_m} \int_{B_m r + A_m}^{B_j r + A_j} f_i(r, z) dr dz + \\ &+ \int_{r_m}^{r_j} \int_{B_m r + A_m}^{B_i r + A_i} f_i(r, z) dr dz, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$A_i = \frac{r_j^* z_m - r_m z_i^*}{r_j^* - r_m}, \quad B_i = \frac{z_j^* - z_m}{r_j^* - r_m}.$$

A_j , B_j , A_m , B_m получаются циклической перестановкой индексов. В случае, если $r_j = r_m$, полагаем $A_i = B_i = 0$. Окончательно, интегралы $\mathcal{J}_i$ равны

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{3} \left\{ B_j(r_m^3 - r_i^3) + B_i(r_j^3 - r_m^3) + B_m(r_i^3 - r_j^3) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ A_j(r_m^2 - r_i^2) + A_i(r_j^2 - r_m^2) + A_m(r_i^2 - r_j^2) \right\},$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2} \left\{ B_j(r_m^2 - r_i^2) + B_i(r_j^2 - r_m^2) + B_m(r_i^2 - r_j^2) \right\} +$$

$$+ A_j(r_m - r_i) + A_i(r_j - r_m) + A_m(r_i - r_j),$$

$$\mathcal{J}_3 = \frac{1}{6} \left\{ B_j^2(r_m^3 - r_i^3) + B_i^2(r_j^3 - r_m^3) + B_m^2(r_i^3 - r_j^3) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ A_j B_j(r_m^2 - r_i^2) + A_i B_i(r_j^2 - r_m^2) + A_m B_m(r_i^2 - r_j^2) + \right.$$

$$\left. + A_j^2(r_m - r_i) + A_i^2(r_j - r_m) + A_m^2(r_i - r_j) \right\},$$

$$\mathcal{J}_4 = (A_m - A_j) \ln r_i + (A_i - A_m) \ln r_j + (A_j - A_i) \ln r_m +$$

$$+ B_i(r_j - r_m) + B_j(r_m - r_i) + B_m(r_i - r_j),$$

$$\mathcal{J}_5 = \frac{1}{2} \left\{ (A_m^2 - A_j^2) \ln r_i + (A_i^2 - A_m^2) \ln r_j + (A_j^2 - A_i^2) \ln r_m \right\} +$$

$$+ A_j B_j(r_m - r_i) + A_i B_i(r_j - r_m) + A_m B_m(r_i - r_j) +$$

$$+ \frac{1}{4} \left\{ B_j^2(r_m^2 - r_i^2) + B_i^2(r_j^2 - r_m^2) + B_m^2(r_i^2 - r_j^2) \right\},$$

$$\mathcal{J}_6 = \frac{1}{3} \left\{ (A_m^3 - A_j^3) \ln r_i + (A_i^3 - A_m^3) \ln r_j + (A_j^3 - A_i^3) \ln r_m \right\} +$$

$$+ A_j^2 B_j(r_m - r_i) + A_i^2 B_i(r_j - r_m) + A_m^2 B_m(r_i - r_j) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ A_j B_j^2 (r_m^2 - r_i^2) + A_i B_i^2 (r_j^2 - r_m^2) + A_m B_m^2 (r_i^2 - r_j^2) \right\} + \\ + \frac{1}{9} \left\{ B_j^3 (r_m^3 - r_i^3) + B_i^3 (r_j^3 - r_m^3) + B_m^3 (r_i^3 - r_j^3) \right\}.$$

Для того, чтобы система (19) была разрешима необходимо задать вектор узловых сил $\{F^n\}$. Он представляет из себя сумму векторов сил, обусловленных сосредоточенными узловыми силами, силами, возникающими вследствие наличия начальных деформаций, напряжений; объемными и поверхностными силами. Наиболее просто задаются сосредоточенные узловые силы. Пусть по i узловой окружности действует вектор погонной нагрузки (размерность кг/см). Его разложение в ряд Фурье имеет вид

$$\begin{Bmatrix} R \\ Z \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=0}^L R^n \cos n\theta \\ \sum_{n=0}^L Z^n \cos n\theta \\ \sum_{n=0}^L T^n \sin n\theta \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Здесь так же, как и в (2) отсутствует антисимметричная нагрузка. Тогда вектор узловых сил для i узла равен

$$\{F_i^n\} = \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} R_i^n \cos^2 n\theta \\ Z_i^n \cos^2 n\theta \\ T_i^n \sin^2 n\theta \end{Bmatrix} r_i d\theta = \pi r_i \begin{Bmatrix} R_i^n \\ Z_i^n \\ T_i^n \end{Bmatrix}, n=1,2,\dots,L \quad (28)$$

Для случая $n = 0$, получим

$$\{F_i^0\} = 2\pi r_i \begin{Bmatrix} R^0 \\ Z^0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Нахождение векторов сил от других нагрузочных факторов более затруднительно в силу необходимости численного интегри-

рования. Например, см. [2]. Однако влияние распределенных поверхностных напряжений можно с достаточной точностью свести к действию погонной нагрузки, а для нее задание вектора узловых сил приведено выше. Пусть на поверхности рассматриваемого тела вращения действует распределенная поверхностная нагрузка: нормальная $p(S, \theta)$ и касательная вдоль образующей $q(S, \theta)$ и перпендикулярно к ней $t(S, \theta)$, как показано на рис. I. Здесь в качестве координаты S принята длина дуги, отсчитываемая по образующей поверхности. Тогда, если для каждой i узловой окружности на поверхности выбрать соответствующий криволинейный отрезок по дуге длиной Δ_i , то можно записать для вектора погонной нагрузки в i узле

$$\begin{Bmatrix} R_i \\ Z_i \\ T_i \end{Bmatrix} = \Delta_i \begin{Bmatrix} p_i(\theta) \cos \alpha_i - q_i(\theta) \sin \alpha_i \\ p_i(\theta) \sin \alpha_i + q_i(\theta) \cos \alpha_i \\ t_i(\theta) \end{Bmatrix} \quad (30)$$

где p_i , q_i , t_i — поверхностная нагрузка суммированная по длине Δ_i ,

α_i — угол между нормалью к поверхности и радиусом r_i ,
 i — узла.

Распределения p_i , q_i и t_i могут быть также разложены в ряды Фурье

$$\begin{aligned} p_i(\theta) &= \sum_{n=0}^L p_i^n \cos n\theta, \\ q_i(\theta) &= \sum_{n=0}^L q_i^n \cos n\theta, \\ t_i(\theta) &= \sum_{n=0}^L t_i^n \sin n\theta. \end{aligned} \quad (31)$$

где коэффициенты разложений определяются по формулам [6]

$$p_i^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_i(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \dots, L,$$

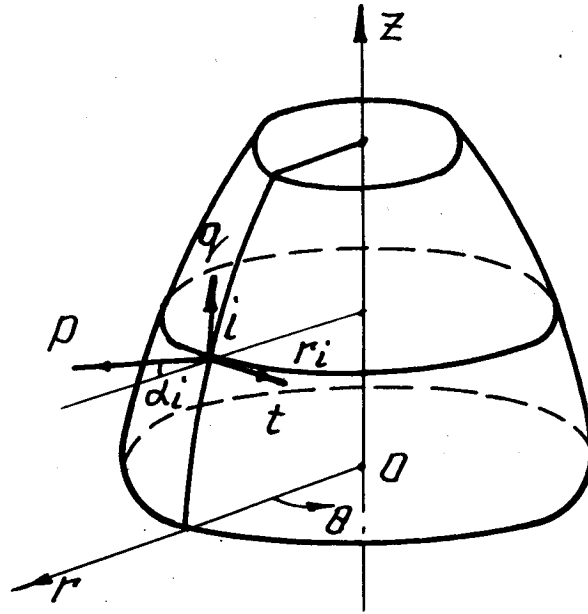


Рис. I. Распределенная поверхностная нагрузка (направления).

$$\begin{aligned} q_i^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_i(\theta) \cos n\theta d\theta, & n = 1, 2, \dots, L, \\ t_i^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_i(\theta) \sin n\theta d\theta, & n = 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (32)$$

При $n = 0$ имеем следующие формулы

$$\begin{aligned} \rho_i^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_i(\theta) d\theta, \\ q_i^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_i(\theta) d\theta, & t_i^0 &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя теперь в формулы (28) и (29) полученные выражения (30) с учетом (31), окончательно получим

$$\{F_i^n\} = \pi r_i \Delta_i \begin{Bmatrix} \rho_i^n \cos \alpha_i - q_i^n \sin \alpha_i \\ \rho_i^n \sin \alpha_i + q_i^n \cos \alpha_i \\ t_i^n \end{Bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, L. \quad (34)$$

И при $n = 0$

$$\{F_i^0\} = 2\pi r_i \Delta_i \begin{Bmatrix} p_i^0 \cos \alpha_i - q_i^0 \sin \alpha_i \\ p_i^0 \sin \alpha_i + q_i^0 \cos \alpha_i \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (35)$$

Задание граничных условий в перемещениях тривиально. Следовательно, изложенные выше формулы позволяют реализовать алгоритм расчета тел вращения при действии неосесимметричной нагрузки. Данный алгоритм был положен в основу вычислительной программы, которая позволяет численно определять напряженно-деформированное состояние для тел вращения.

В качестве тестового примера рассматривалась задача о плоском напряженном состоянии в диске под действием силы в срединной плоскости, то есть лишь одна первая гармоника в ряде Фурье. На рис. 2 показана расчетная схема задачи.

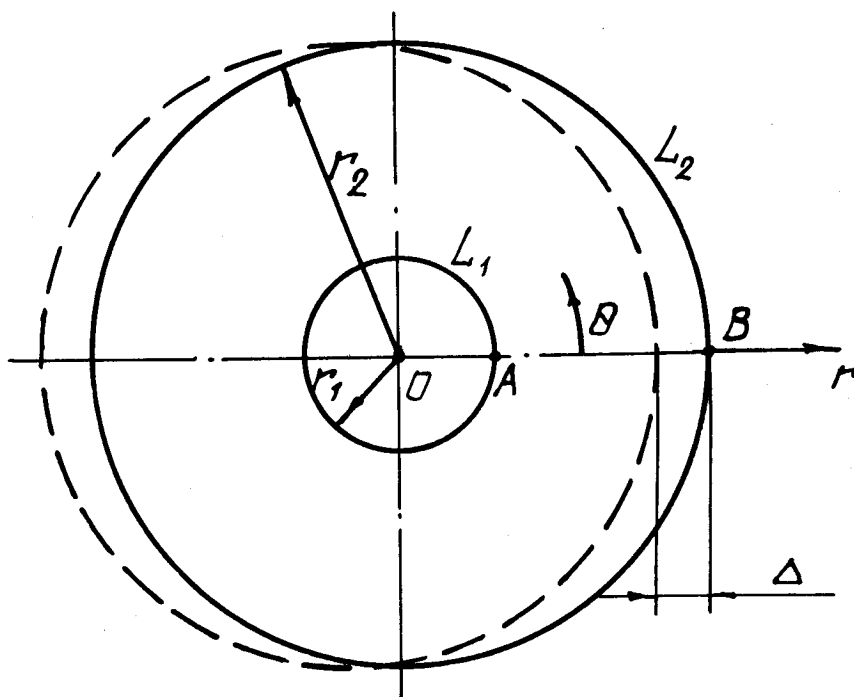


Рис. 2. Расчетная схема задачи о деформировании плоского диска.

Рассматривается диск толщиной h , заземленный по внутреннему L_1 и внешнему контуру L_2 . Контур L_1 остается неподвижен, а контур L_2 (вместе с заделкой) под действием силы P смещается на расстояние Δ . Радиусы контуров L_1 и L_2 соответственно r_1 и r_2 . Данная задача выбрана в качестве тестовой потому, что для нее существует аналитическое решение [7], полученное при помощи теории функций комплексного переменного. Например, максимальные напряжения при $r = r_2$ равны

$$\sigma_r = \frac{2\mu\Delta\alpha}{Kr_2} \left[3(r_1^2 + r_2^2) + 2\frac{r_2^2}{\alpha} + \alpha(r_1^2 + r_2^2) - 2r_1^2 \right], \quad (36)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2\mu\Delta\alpha}{Kr_2} \left[r_1^2 + r_2^2 + 2\frac{r_2^2}{\alpha} - \alpha(r_1^2 + r_2^2) - 2r_1^2 \right], \quad (37)$$

где

$$K = 2 \left[r_1^2 - r_2^2 - \alpha^2(r_1^2 + r_2^2) \ln \frac{r_1}{r_2} \right],$$

$$\alpha = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

В конечноэлементной постановке прямоугольное сечение AB (рис. 2) покрывалось сеткой треугольных в сечении элементов. Количество узлов по толщине диска n_h и по радиусу n_r варьировалось. На рис. 3 представлена эпюра перемещений в сечении AB для следующих параметров диска и нагрузки: $r_1 = 14,5$ см, $r_2 = 39,5$ см, $h = 2$ см, $\Delta = 0,01$ см.

Эпюра определена для $KЭ$ - сетки с параметрами $n_h \times n_r = 10 \times 20$. При этом перемещения u_r совпадают с соответствующими аналитическими. Аналитические перемещения $u_z = 0$, что для середины диска в общем не верно, а является погрешностью аналитической постановки (модель плоского напряженного состояния).

Результаты по напряжениям следующие: аналитическое реше-

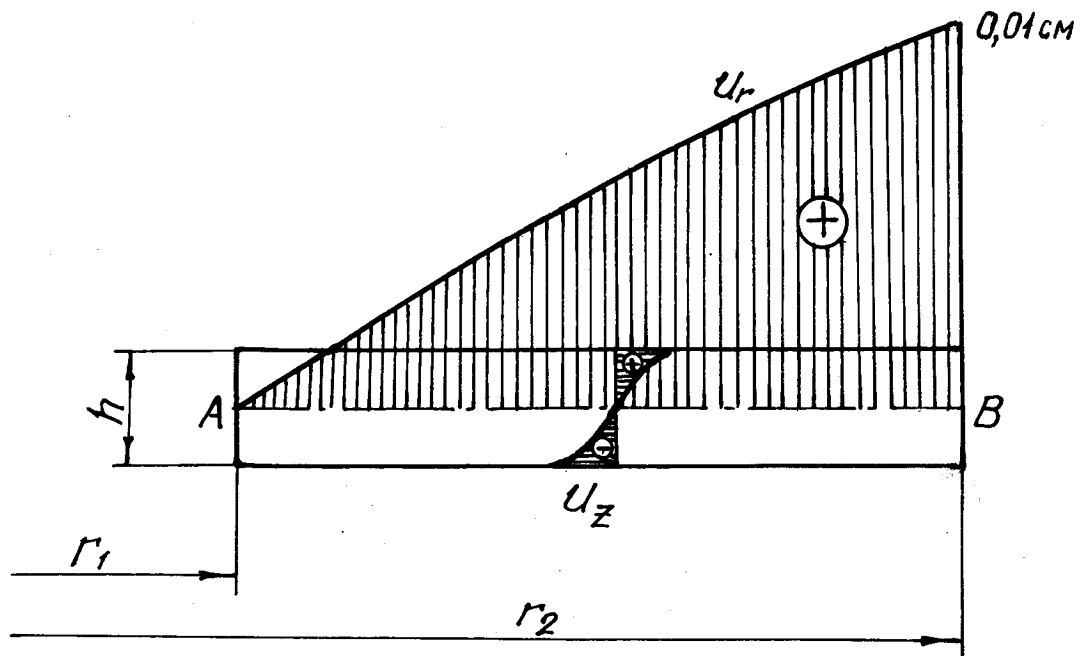


Рис. 3. Эпюра перемещений в сечении AB , определенная при помощи полуаналитического МКЭ.

ние, формулы (36), (37) - $\sigma_r = 646,2 \text{ кг/см}^2$, $\tau_{r\theta} = -52,92 \text{ кг/см}^2$; полуаналитический МКЭ, сетка $n_h \times n_r = 10 \times 20$ - $\sigma_r = 654,67 \text{ кг/см}^2$, $\tau_{r\theta} = -50,28 \text{ кг/см}^2$; сетка $n_h \times n_r = 10 \times 80$ - $\sigma_r = 649,71 \text{ кг/см}^2$, $\tau_{r\theta} = -51,77 \text{ кг/см}^2$. То есть для первой сетки максимальная погрешность решения не превосходит 5%, для второй сетки 2,1%.

Таким образом, можно утверждать, что полуаналитический МКЭ в приведенной выше постановке достаточно эффективен для решения задач деформирования тел вращения под действием неосесимметричной нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильсон. Расчет на прочность осесимметричных тел // Ракетная техника и космонавтика.- 1965. Т.3, № 12.- С.124-131.

2. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 541 с.
3. Рузин, Клешульте, Кофлин. Применение метода конечных элементов для расчета усовершенствованных конструкций колес железнодорожных вагонов // Конструирование.- М.: Мир, 1979. Т.101, № 3.- С.220-227.
4. Альтенбах И., Андреев А.Г., Фриче Г. Расчет напряжений и деформаций в вагонных колесах // Динамика и прочность машин.- Харьков, 1978. Вып.28.- С. 126-133.
5. Program pro reseni deformace a napeti rotacnich teles metodou konecných elementu // Statni vyzkumny ustav pro stavbu stoji.- Bechovice, 1976. - 26p.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.- М.: Наука, 1974.- 832 с.
7. Определение напряжений в плоском диске железнодорожного колеса / Моссаковский В.И., Есаулов В.П., Сладковский А.В. Днепропетр. металлург. ин-т.- Днепропетровск, 1988.- 14 с. Деп. в УкрНИИТИ.19.09.88. № 2398-Ук88.

ПЕЧАТАЕТСЯ В СООТВЕТСТВИИ С РЕШЕНИЕМ УЧЕНОГО
СОВЕТА ЭНЕРГОМЕХАНИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ДНЕПРОПЕТРОВСКОГО МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ОТ 31 АВГУСТА 1988 ГОДА